

GEOMETRIK VA PUASSON TAQSIMOTI BILAN BOG‘LIQ BAZI MASALALAR TO‘G‘RISIDA

Babanazarov Maqsad Amanboyevich

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston milliy universiteti.

II bosqich magistranti

Ehtimollar nazariyasi va uning tatbiqlarida Puasson va Geometrik taqsimoti muhim rol o‘ynaydi. Ushbu ishda Puasson va Geometrik taqsimoti bilan bog‘liq bo‘lgan ba‘zi teoremlar va misollar yechilishi o‘rganilgan.

Tarif 1[1] Agar X tasodifiy miqdorning $1, 2, \dots, m, \dots$ qiymatlarini

$$p_m = P\{X = m\} = q^{m-1} p$$

ehtimolliklar bilan qabul qilsa, u *geometrik qonuni* bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning deyiladi. Bu yerda $p = 1 - q \in (0, 1)$.

Endi bu taqsimotning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot q^{m-1} p = p \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot q^{m-1} = p \left(\sum_{m=0}^{\infty} q^m \right)'_q = p \left(\frac{1}{1-q} \right)'_q \\ &= p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}, \end{aligned}$$

$$DX = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \cdot q^{m-1} p - \frac{1}{p^2} = (m^2 = m(m-1) + m \text{ almashtirishni bajaramiz})$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \cdot (m-1) q^{m-1} p + \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot q^{m-1} p - \frac{1}{p^2} = pq \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot (m-1) q^{m-2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$q \left(\sum_{m=0}^{\infty} q^m \right)'_{q^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = pq \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2pq}{p^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

$$\text{Demak, } MX = \frac{1}{p}; \quad DX = \frac{q}{p^2}.$$

Talaba ichi odamlar bilan to‘la avtobusda shaharning boshqa chetiga tik turib ketmoqda. U o‘ziga bo‘sh joy topishga harkat qilmoqda. Bu urinishlar bir-biri bilan bog‘liq emas va bo‘sh joyga o‘tirish ehtimoli o‘zgarmas va 0.05 ga teng. ξ -tasodifiy

miqdor talabning bo'sh joyga o'tirish uchun omadsiz urinishlar soni bo'lsin. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping, uning ehtimollik xarakteristikalarini toping va quyidagi hodislarning ehtimoligini toping:

talabaga 7-urinishda omad kulib boqadi; omadsiz urinishlar soni 2 dan oshmaydi;

omadli urinishlar soni 8-urinishdan boshlab boshlanadi.

Yechish: Tasodifiy o'zgaruvchi ξ doimiy o'tish ehtimoli $p=0,05$ urinishlar natijasi muvaffaqiyati yoki muvaffaqiyatsiz bo'lishi mumkin.

$\xi \sim \text{Geom}(0,05)$ Hodisaning ehtimoligi quydagicha hisoblanadi.

$$P(\xi = k) = 0,05 \times 0,95^k$$

Bu yerda $k \in N_0$ va $q = 1 - p = 0,95$

$$M\xi = 19 \quad D\xi = 380 \quad \sigma\xi = 19,5$$

$$P(\xi = 6) = 0,05 \times 0,95^6 \approx 0,037 = 3,7\%$$

$$P(\xi \leq 2) = \sum_{k=0}^2 P(\xi = k) = 0,05 + 0,05 \times 0,95 + 0,05 \times (0,95)^2 \approx 0,14 = 14\%$$

$$P(\xi \geq 7) = 1 - P(\xi < 7) =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^6 P(\xi = k) = 1 - 0,05 \sum_{k=0}^6 0,95^k = (0,95)^7 \approx 0,7 = 70\%$$

$$\text{Javob: } M\xi = 19 \quad D\xi = 380 \quad \sigma\xi = 19,5 \quad P(\xi = 6) = 0,037 = 3,7\%$$

$$P(\xi \leq 2) \approx 0,14 = 14\% \quad P(\xi \geq 7) \approx 0,7 = 70\%$$

Puasson taqsimoti

Tarif [2] Agar X tasodifiy miqdorning $0,1,2,\dots,m,\dots$ qiymatlarni

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$$

ehtimolliklar bilan qabul qilsa, u *Puasson qonuni* bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning deyiladi. Bu yerda a biror musbat son.

Endi bu taqsimotning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$MX = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!} = e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \frac{a^m}{m!} = a \cdot e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} = a \cdot e^{-a} \cdot e^a = a,$$

$$\begin{aligned} DX &= \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \cdot \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!} - a^2 = a \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \frac{a^{m-1} \cdot e^{-a}}{(m-1)!} - a^2 = \\ &= a \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{a^k \cdot e^{-a}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \cdot e^{-a}}{k!} \right] - a^2 = a(a+1) - a^2 = a \end{aligned}$$

Demak, $MX = a$; $DX = a$.

Konsert payti mashxur xonandaning jihozlar ishlamay qolish ehtimoli 3% ga teng va bu paytda jonli kuylashga to'g'ri keladi. ξ -xonandaning jihozlari ishdan chiqib qolgan konsertlar soni bo'lsin. Bir yilga 100 ta konsert rejalashtirilgan. Quyidagi hodislarning ehtimolliklarni toping:

jihozlar 8 ta konsertda ishdan chiqdi;

jihozlar 4 tadan kam bo'lgan konsertda ishdan chiqdi;

jonli kuylagan konsertlar soni 7 da 10 gacha (7 bilan 10 kiradi).

Yechish: Muammo "muvaffaqiyat" ehtimoli $p=0,03$ past, ko'p sonli sinovlar $n=100$ va bir qancha "muvaffaqiyatlar" $k \ll n$, bo'lgan Bernulli sxemasini ko'rib chiqadi, bunda "muvaffaqiyat" uskunaning ishdan chiqishini bildiradi. Berilgan sharoitda binomial koeffitsientlarni hisoblash va $q = 1 - p$ qiymatini katta quvvatga ko'tarish juda qiyin. Biroq, $q = 1 - p$, p tasodifiy o'zgaruvchini taxminan kamida 4 ta konsertda uskunaning ishdan chiqishi ehtimoli:

$$\xi \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$P(\xi = k) = P(\xi = k) = \frac{3^k}{k!} e^{-3}$$

$$P(\xi = 8) = \frac{3^8}{8!} e^{-3} \approx 0,008 = 0,8\%$$

$$P(\xi \geq 4) = 1 - P(\xi < 4) \approx 1 - P(\xi < 4) = 1 - \sum_{k=0}^3 P(\xi = k) = 1 - 13 e^{-3}$$

$$\approx 0,35 = 35\%$$

$$P(7 \leq \xi \leq 10) = \sum_{k=7}^{10} P(\xi = k) \approx \sum_{k=7}^{10} P(\xi = k) = \left(1 + \frac{4}{8} + \frac{3}{30}\right) \frac{3^{-7}}{7!} e^{-3}$$

$$\approx 0,033 = 3,3\%$$

Javob: $P(\xi = 8) \approx 0,8\%$, $P(\xi \geq 4) \approx 35\%$ $P(7 \leq \xi \leq 10) \approx 3,3\%$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

- [1] A. N. Shirayev. Probability. “ Graduate Texts in Mathematics ;95” . Springer Science+. Business Media, LLC. 1984 year.
- [2] Sh.Q.Formanov. Ehtimolliklar nazariyasi. Darslik. Toshkent, “Universitet”, 2014.
- [3] Самарова С.С.2-курс теория вероятностей Лектор А.В. Булинский. Гр.855