SONNING BUTUN VA KASR QISMIGA DOIR TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI

PARDAYEVA Z.O'.
JDPI, Matematika o'qitish metodikasi
***Mamatov Jasur Asatullayevich*.**
JDPI, Matematika o'qitish metodikasi

Annotatsiya: Ushbu maqolada sonning butun va kasr qismi mavzusi qaraladi. Bu mavzu umumta'lim maktablari, kasb-hunar kollejlari, akademik litseylarda yetarlicha o'rganilmagan.

Kalit so'zlar: Sonning butun qismi, sonning kasr qismi, tenglama, tengsizlik, butun son.

Ma'lumki, maktab matematika kursiga sonning butun va kasr qismi mavzusi kiritilmagan, akademik litseylarda esa kam soat ajratiladi. Lekin matematika olimpiadalarida shu mavzuga doir masalalar uchraydi. Bu mavzu bo'yicha ma'lumotlarni topish ham biroz qiyinroq. Shu sababli bu mavzuga doir ma'lumotlarni va tenglamalarni yechish usullarini ko'rib chiqamiz.

Ta'rif: x sonning butun qismi deb x dan oshmaydigan eng katta butun songa aytiladi va $[x]$ kabi belgilanadi.

Misol: [3]=3; [4.8]=4; [-2]=-2; [-5.3]=-6

Ta'rif: Sonning kasr qismi deb, uning noldan kichik emas,ammo birdan kichik qismiga aytiladi va $\{x\}$ kabi belgilanadi.

Har qanday haqiqiy x sonni: $x=[x]+\{x\}$ ko'rinishda yozish mumkin.

Ixtiyoriy haqiqiy x va a butun son uchun $[x+a]=[x]+a$ o'rinlidir.

Isbot: $x=[x]+\{x\}$bo'lgani uchun $x+a=[x]+\{x\}+a$ shu bilan birga $[x]+\{x\}+a\le x+a+1$. U holda $[x]+a$, $x+a$ dan oshmaydigan eng katta butun son. Shunday qilib $[x+a]=[x]+a$.

Teorema: Ixtiyoriy haqiqiy x va ixtiyoriy natural n soni uchun $[nx]\ge n[x]$ o'rinli.

Isbot: $x=[x]+\{x\}$ dan foydalanamiz. U holda $nx=n[x]+n\{x\}$ $n[x]$ butun son bo'lgani uchun $[nx]=[n[x]+n\{x\}]$. n va $\{x\}$ lar nomanfiy sonlar bo'lgani uchun $[n\{x\}]\geq 0$ bundan esa $[nx]\geq [n[x]]=n[x]$.

Misol 1. $[2x]+[5x]=15$ tenglamani yeching.

Yechish: $[2x]\geq 2[x]$ va $[5x]\geq 5[x]$dan foydalanamiz. U holda $[2x]+[5x]\geq 2[x]+5[x]=7[x]$. U holda $7[x]\leq 15$. $[x]$ butun son bo'lgani uchun $[x]\leq 2$, demak $x<3$.

$x<2$ bo'lsin. U holda $2x<4$ bo'ladi. $[2x]\leq 3$; $5x<10$, $[5x]\leq 9$ bundan esa $[2x]+[5x]\leq 12$ kelib chiqadi. Bunday bo'lishi mumkin emas. Shunday qilib $2\leq x<3$. Endi $x=2+\{x\}$ dan foydalanamiz. Berilgan tenglamani $[4+2\{x\}]+[10+5\{x\}]=15$ yoki $[2\{x\}]+[5\{x\}]=1$ ko'rinishda yozamiz. $[2\{x\}]$ va $[5\{x\}]$ lar butun musbat sonlar bo'lgani uchun $[2\{x\}]\leq[5\{x\}]$ bo'lgabi uchun $[2\{x\}]=0$ va $[5\{x\}]=1$

$$[2\{x\}]=0 \iff 0\leq 2\{x\}<1 \iff 0\leq\{x\}<0.5$$

$$[5\{x\}]=1 \iff 1\leq 5\{x\}<2 \iff 0.2\leq\{x\}<0.4$$

$x=2+\{x\}$ekanlagini hisobga olib $2.2\leq x<2.4$ ni hosil qilamiz.

Javob: $2.2\leq x<2.4$

Ko'rinib turibdiki sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglama cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi mumkin.

Misol 2. $[3x-5.2]=\frac{7}{3}$ tenglama yechimga ega emas.

Misol 3. $[x^2-5x+6]=1$ tenglamani yeching.

Yechish: $1\leq x^2-5x+6<2$

a) $x^2-5x+5\geq 0 \Rightarrow x_{1.2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x\leq\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ va $x>\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

b) $x^2-5x+4<0 \Rightarrow x_{3.4}=\frac{5\pm 3}{2}$; $x\in(1;4)$

Shunday qilib, $x\in\left(1;\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{5}}{2};4\right)$

Misol 4. $[10^x]=0 \Rightarrow 10^x<1 \Rightarrow x<0$

Misol 5. $[\lg(3x)]=2 \;\Rightarrow\; 2\le \lg(3x)<3 \;\Rightarrow\; 100\le 3x<1000 \;\Rightarrow\; \frac{100}{3}\le x<\frac{1000}{3}$

Misol 6.

$$x^2-5[x]-3=0 \Rightarrow [x]=\frac{x^2-3}{5} \Rightarrow \frac{x^2-3}{5}\le x<\frac{x^2-3}{5}+1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x-3\le 0 \\ x^2-5x+2>0 \end{cases}$$

Bu tengsizliklar sistemasining yechimi: $\frac{5-\sqrt{37}}{2}\le x<\frac{5-\sqrt{17}}{2}$, $\frac{5+\sqrt{17}}{2}<x\le\frac{5+\sqrt{37}}{2}$ birinchi oraliqda yechim yo'q. Ikkinchi oraliqda esa $x=\sqrt{23}$ va $x=\sqrt{28}$

Misol 7. $\left[\frac{x-3}{2}\right]=\left[\frac{x-2}{3}\right]$ tenglamani yeching.

Yechish: Agar ikki son butun qismlari teng bo'lsa, ular ayirmasining moduli birdan kichik bo'ladi: $-1<\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{3}<1 \;\Rightarrow\; -1<x<11$

x ning bu qiymatlarida $-1<\frac{x-2}{3}<3$ natijada $\frac{x-2}{3}$ va $\frac{x-3}{2}$ ifodalar bir vaqtda $[-1;0)$, $[0;1)$, $[1;2)$, $[2;3)$ yotishlari kerak. Tegishli tenglamalar sistemasini yechib berilgan tenglama yechimini hosil qilamiz: $1\le x<2$; $3\le x<7$; $8\le x<9$

Misol 8. $[x+1]+[x+2]-[x+3]=2$ tenglamani yeching.

Yechish: $[x+1]=[x]+1$; $[x+2]=[x]+2$; $[x+3]=[x]+3$.

U holda, $[x]+1+[x]+2-[x]-3=2$, bu yerdan $[x]=2$ni hosil qilamiz, uning yechimi $2\le x<3$.

Misol 9. $4^{[x]}-6\cdot 2^{[x]}+8=0$ tenglamani yeching.

Yechish: $2^{[x]}=t$ belgilash kiritamiz, u holda berilgan tenglama $t^2-6t+8=0$ ko'rinishga keladi. Uning yechimlari $t_1=2$; $t_2=4$

Demak,

$2^{[x]}=2 \;\Rightarrow\; [x]=1 \;\Rightarrow\; 1\le x<2$

$2^{[x]}=4 \;\Rightarrow\; [x]=2 \;\Rightarrow\; 2\le x<3$

Javob: $1\le x<3$

Misol 10. $[\sin x+\cos x]=1$ tenglamani yeching.

Yechish : $1 \le \sin x + \cos x < 2$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin(x + \frac{\pi}{4}) < \sqrt{2}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\,,\ k \in Z$$

$$2\pi k \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k\,,\ k \in Z$$

Javob: $x \in \left[2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in Z$

Maktabda matematikani o'qitishdan maqsad - o'quvchilarga mustahkam bilim berish, boshqa fanlarni o'rganish va bilimini oshirishga yordam berishdir. O'qish bilan birga fanga muntazam qiziqish uyg'otish, o'quvchilardagi qobilyatni aniqlash va uni rivojlantirishdir. Bu maqoladagi materiallar matematikadagi masalalarni yanada chuqurroq o'rganishga yordam beradi. Sonning butun va kasr qismi mavzusiga doir bilimlarni kengaytiradi. Natijada o'quvchilar turli bosqichlardagi olimpiadalarda uchraydigan masalalarni yechishda qiyinchilikka duch kelmaydilar.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. M.Caxayev. Elementar matematika masalalari to'plami.I,II qismlar. Toshkent."O'qituvchi"-1970,1972.
2. M.Caxayev.Algebra va elementar funksiyalar. Toshkent."O'qituvchi"-1972.
3. R.K.Otajonov.Geometrik yasash metodlari. Toshkent."O'qituvchi"-1995.
4. T.To'laganov.Masalalar yechish bo'yicha praktikum [Algebra]. Toshkent."O'qituvchi"- 1981.
5. E.N.Kusenko, N.N. Melnikov.Matematikadan masalalar yechish bo'yicha qo'llanma. Toshkent."O'qituvchi"- 1983